

# 均質化法による積層鉄心の渦電流を 含む非線形有限要素法過渡磁場解析

亀有 昭久\* (サイエンスソリューションズ)

藤原 耕二 (岡山大学)

電気学会静止器・回転機合同研究会  
理化学研究所



# はじめに

## ★ 非線形静磁場における積層鉄心の均質化

亀有昭久・藤原耕二：「均質化法による積層鉄心の非線形静磁場解析」，電気学会静止器・回転機合同研究会資料，SA-05-83，RM-05-90（2005）

## ★ 回転機委員会ベンチマーク問題への適用

貝森弘行・亀有昭久：「均質化法による積層鉄心損失解析-積層鉄心解析手法検証用ベンチマークモデル-」，電気学会静止器・回転機合同研究会資料，SA-06-23，

RM-06-23（2006）

低周波では静磁場均質化による構成関係で近似  
できる

## ★ 過渡磁場解析への拡張→高周波領域



# 前稿の修正

亀有昭久・藤原耕二：「均質化法による積層鉄心の非線形静磁場解析」，  
電気学会静止器・回転機合同研究会資料，SA-05-83，RM-05-90（2005）

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}} = \begin{bmatrix} N_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & N_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & N_{\perp} \end{bmatrix} + \alpha \beta \begin{bmatrix} \left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^4 B_X^2 & \left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^4 B_X B_Y & \left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^2 B_X B_Z \\ \left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^4 B_X B_Y & \left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^4 B_Y^2 & \left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^2 B_Y B_Z \\ \left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^2 B_X B_Z & \left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^2 B_Y B_Z & B_Z^2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{b_s^2} \left( \frac{\partial h_s}{\partial b_s} - \frac{h_s}{b_s} \right) \quad (14)$$

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{1 - \alpha \left(\frac{N_{\parallel}}{v_0}\right)^3}{v_0} \frac{B_X^2 + B_Y^2}{b_s^2} \left( \frac{\partial h_s}{\partial b_s} - \frac{h_s}{b_s} \right)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_s}{\partial B_X} &= \frac{\left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^2 \frac{B_X}{b_s} \frac{\partial v_s}{\partial b_s}}{1 + \frac{1}{v_s} \left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^2 \left(1 - \frac{\alpha N_{\parallel}}{v_s}\right) \frac{B_X^2 + B_Y^2}{b_s} \frac{\partial v_s}{\partial b_s}} \quad (\text{A6}) \\
&= \beta \left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^2 \frac{B_X}{b_s} \frac{\partial v_s}{\partial b_s} = \beta \left(\frac{N_{\parallel}}{v_s}\right)^2 \frac{B_X}{b_s^2} \left(\frac{\partial h_s}{\partial b_s} - \frac{h_s}{b_s}\right)
\end{aligned}$$



# 積層鉄心の均質化

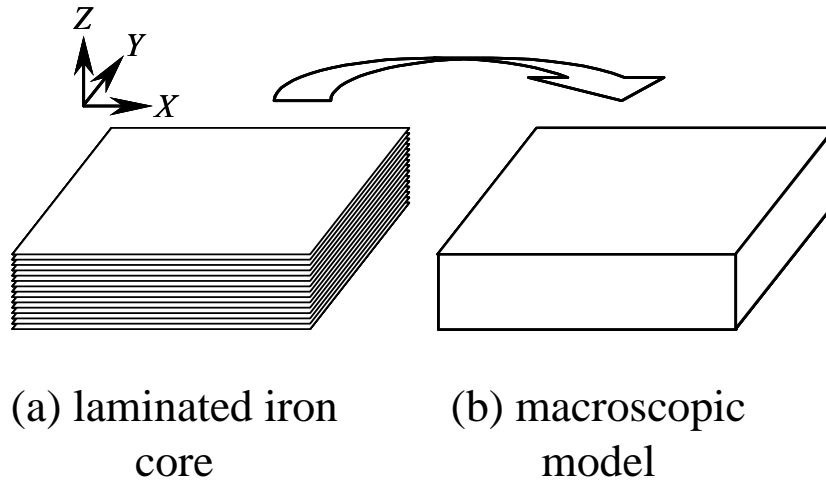


図 1 積層鉄心の均質化

- ・有限要素メッシュを積層構造と独立
- ・マクロ解析では構成関係  $H(B)$ ,  $J(E)$  が変わるのみ

# 積層鉄心のマイクロモデルの 単位セル

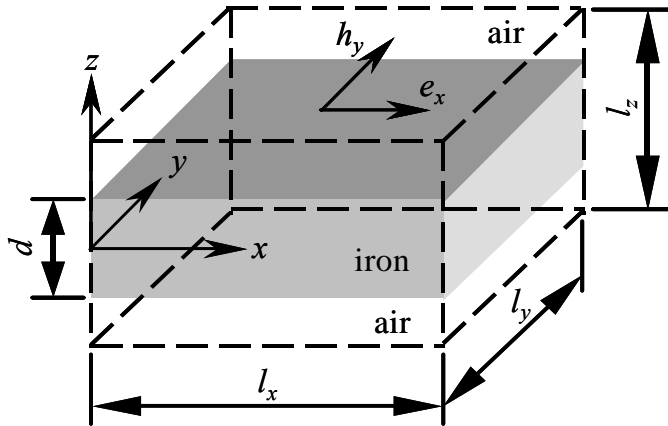


図2 積層鉄心マイクロモデル

$x, y$ : 積層面内  $z$ : 積層方向

$x, y$ 方向に一様性を仮定

鉄部は均質で等方性、占積率

$$\alpha = d/l_z$$

# マイクロ量とマクロ量

## マイクロ

座標:  $x(x, y, z)$

マイクロ電磁場:  $b, h, e, j$

Maxwell方程式

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j}$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}$$

構成方程式

鉄部

$$\mathbf{h} = h(b) \frac{\mathbf{b}}{b} = \nu(b) \mathbf{b}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$$

空気部

$$\mathbf{h} = \nu_0 \mathbf{b}$$

$$\mathbf{j} = 0$$

## マクロ

座標:  $X(X, Y, Z)$

マクロ電磁場:  $B, H, E, J$

Maxwell方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

構成方程式

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{B}, \mathbf{E})$$

# エネルギー保存式

$$\begin{aligned}
 & \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{e} dv + \partial_t \left\{ \iiint_V \left( \int \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv \right\} \\
 &= \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{e} dv + \iiint_V \mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{b} dv \\
 &= \iiint_V \nabla \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{e} dv - \iiint_V \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} dv \\
 &= \iint_S \mathbf{h} \times \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} ds
 \end{aligned}$$

## マイクロセルに適用

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{V} \left[ \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{e} dv + \partial_t \left\{ \iiint_V \left( \int \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv \right\} \right] \\
 &= J_x E_x + J_y E_y + H_x \partial_t B_x + H_y \partial_t B_y + H_z \partial_t B_z \\
 &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \partial_t \left( \int_B \mathbf{H} d\mathbf{B} \right)
 \end{aligned}$$



## ミクロ量とマクロ量の関係

x方向

$$E_x = \frac{e_x^- + e_x^+}{2}$$

$$J_x = -\frac{h_y^+ - h_y^-}{l_z} = \frac{1}{l_z} \int_{-l_z/2}^{l_z/2} j_x dz$$

$$H_x = \frac{h_x^- + h_x^+}{2}$$

$$B_x = \partial_t \left( \frac{e_y^+ - e_y^-}{l_z} \right) = \frac{1}{l_z} \int_{-l_z/2}^{l_z/2} b_x dz$$

y方向

$$E_y = \frac{e_y^- + e_y^+}{2}$$

$$J_y = \frac{h_x^+ - h_x^-}{l_z}$$

$$H_y = \frac{h_y^- + h_y^+}{2}$$

$$B_y = -\partial_t \left( \frac{e_x^+ - e_x^-}{l_z} \right)$$

z方向

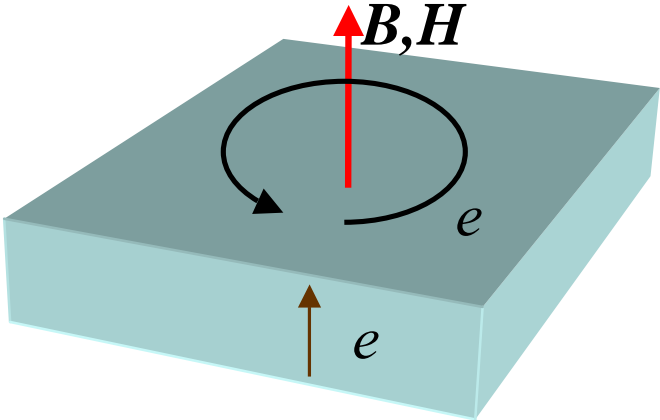
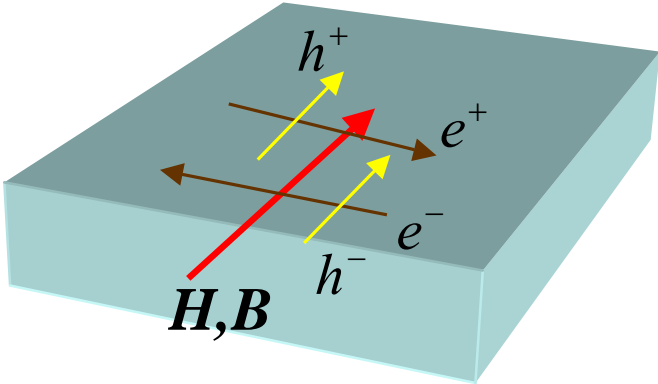
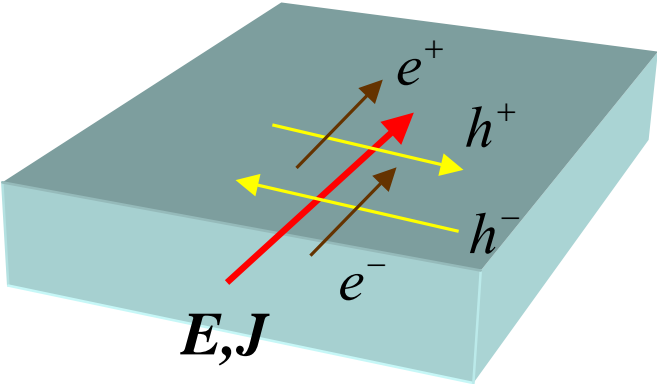
$$E_z = \frac{1}{l_z} \int_{-l_z/2}^{l_z/2} e_z dz$$

$$J_z = j_z = 0$$

$$H_z = \frac{1}{l_z} \int_{-l_z/2}^{l_z/2} h_z dz$$

$$B_z = b_z$$





# 線形定常解析(ミクロ)

Maxwell方程式

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j}$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -j\omega \mathbf{b}$$

構成方程式

鉄部

$$\mathbf{h} = \nu_s \mathbf{b}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$$



# 線形定常解析(マクロ)

マクロ導電率  $\Sigma_X = \Sigma_Y = \Sigma_{\parallel} = \frac{\alpha\chi\sigma_s}{1 - \frac{\mu_0}{4\mu_s} \frac{1-\alpha}{\alpha} \chi(\gamma d)^2}$

$$\Sigma_z = 0$$

マクロ透磁率  $M_X = M_Y = M_{\parallel} = \alpha\chi\mu_s + (1-\alpha)\mu_0$

$$\frac{1}{M_z} = \frac{\alpha}{\mu_s} + \frac{1-\alpha}{\mu_0}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{j\mu_s\sigma_s\omega}}{\sqrt{\frac{2}{\mu_s\sigma_s\omega}}} = \frac{(1+j)}{\lambda} = \frac{1+j}{\lambda} \quad \chi = \frac{2 \sinh(\gamma d/2)}{\gamma d \cosh(\gamma d/2)} \approx 1 - \frac{j}{6} \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2$$

# 線形定常解析(ロス)

$$\frac{1}{V} \left[ \iiint_V \bar{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{e} dv + j\omega \left\{ \iiint_V \bar{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{b} \right\} \right]$$

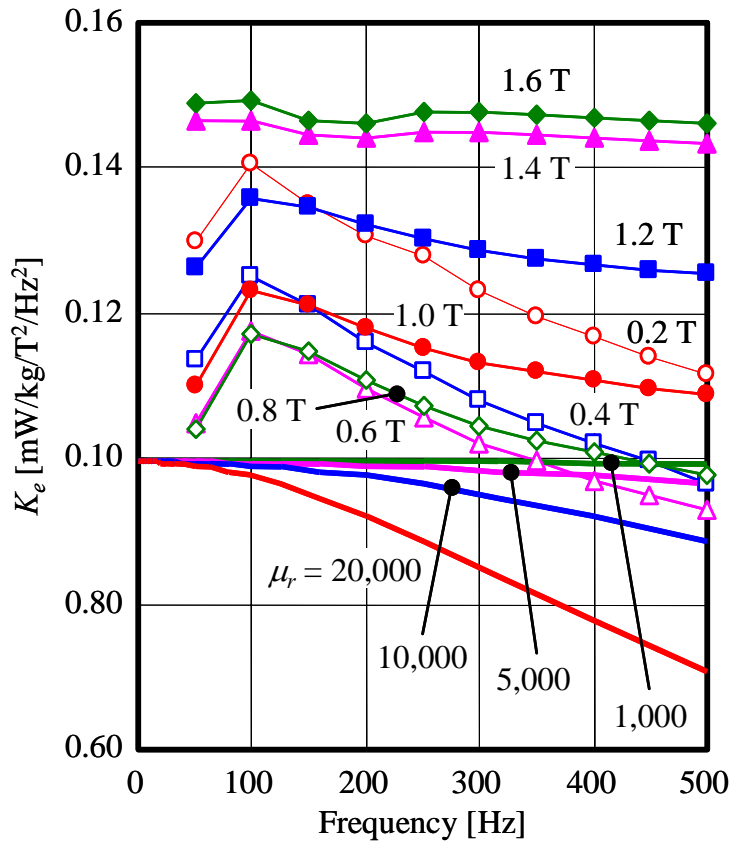
$$= \bar{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{E} + j\omega \bar{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}$$

$$W = \operatorname{Re} \left( \frac{-j\omega}{M_{\parallel}} \right) |B_{\parallel}|^2 + \operatorname{Re}(\Sigma_{\parallel}) |E_{\parallel}|^2$$

$$\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} K_e B_{\max}^2 f^2 + \alpha \sigma_s |E_{\parallel}|^2$$



# $K_e$ の周波数依存性(50A310)



50A310圧延方向

$\rho=54 \times 10^{-8}\Omega\text{m}$

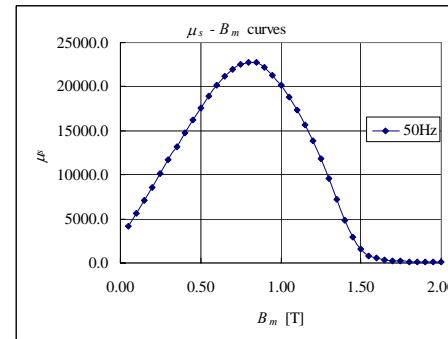


図3  $K_e$ の周波数依存性の計測値と解析値の比較

# 面内導電率

$$\text{Re}(\Sigma_{\parallel}) = k\sigma$$

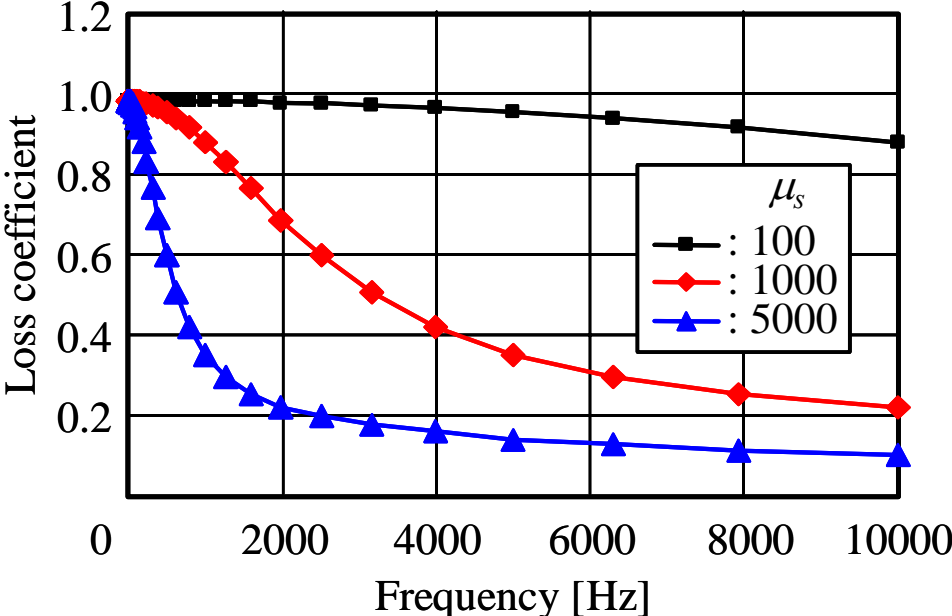


図4 積層面内マクロ渦電流損の係数 ( $k$ )

# 渦電流を含んだ過渡解析（ミクログ解析）

## ポテンシャル（A法）

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} &= \nabla \times \mathbf{a} & b_x &= -\frac{\partial a_y}{\partial z} & b_y &= \frac{\partial a_x}{\partial z} & b_z &= B_z \\
 \mathbf{e} &= -\partial_t \mathbf{a} & e_x &= -\partial_t a_x & e_y &= -\partial_t a_y
 \end{aligned}$$

## 支配方程式

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} \quad -\frac{\partial h_y}{\partial z} + \sigma \partial_t a_x = 0 \quad \frac{\partial h_x}{\partial z} + \sigma \partial_t a_z = 0$$

## 構成方程式

鉄部

$$\begin{aligned}
 h_x &= \nu_s(b)b_x & h_y &= \nu_s(b)b_y & b &= \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \\
 \sigma &= \sigma_s
 \end{aligned}$$

空気部

$$\begin{aligned}
 h_x &= \nu_0 \\
 \sigma &= 0
 \end{aligned}$$

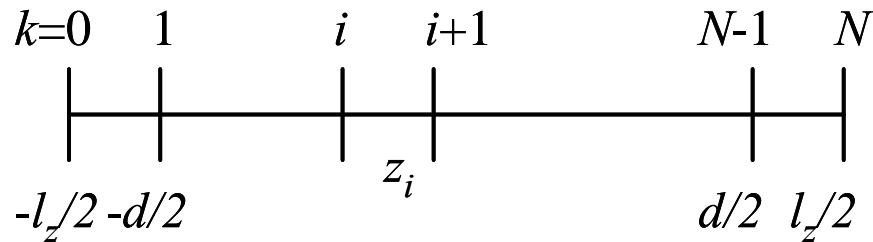
## ミク口解析 境界条件

$$a_x^- = A_X - \frac{l_z B_Y}{2} \qquad a_y^- = A_Y + \frac{l_z B_X}{2}$$

$$a_x^+ = A_X + \frac{l_z B_Y}{2} \qquad a_y^+ = A_Y - \frac{l_z B_X}{2}$$



# マクロ解析 $\leftrightarrow$ ミクロ解析



マクロ  
解析

$A_X, A_Y$   
 $B_X, B_Y, B_Z$

ミクロ境界  
条件

$a_x^\pm, a_y^\pm, b_z$

非線形一次元

有限要素法(差分法)

$h_x^\pm, h_y^\pm, h_z$

マクロ解析

$J_X, J_Y$

$H_X, H_Y, H_Z$

# ミク口解析有限要素法

$$\begin{aligned}
 R(\omega_x, \omega_y) &= \int_{-l_z/2}^{l_z/2} \omega_x \left\{ -\frac{\partial h_y}{\partial z} + \sigma \partial_t a_x \right\} dz + \int_{-l_z/2}^{l_z/2} \omega_y \left\{ \frac{\partial h_x}{\partial z} + \sigma \partial_t a_y \right\} dz \\
 &= \int_{-l_z/2}^{l_z/2} \left\{ \frac{\partial \omega_x}{\partial z} h_y - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} h_x + \sigma (\omega_x \partial_t a_x + \omega_y \partial_t a_y) \right\} dz - (\omega_x h_y - \omega_y h_x) \Big|_{-l_z/2}^{l_z/2}
 \end{aligned}$$



# ミク口解析有限要素法 線形化

$$\delta R(\omega_x, \omega_y) = \int_{-l_z/2}^{l_z/2} \left\{ \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \delta h_y - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \delta h_x + \sigma (\omega_x \partial_t \delta a_x + \omega_y \partial_t \delta a_y) \right\} dz$$

$$- (\omega_x \delta h_y - \omega_y \delta h_x) \Big|_{-l_z/2}^{l_z/2}$$

$$\delta h_y = \frac{\partial h_y}{\partial b_x} \delta b_x + \frac{\partial h_y}{\partial b_y} \delta b_y + \frac{\partial h_y}{\partial b_z} \delta b_z \quad \delta h_x = \frac{\partial h_x}{\partial b_x} \delta b_x + \frac{\partial h_x}{\partial b_y} \delta b_y + \frac{\partial h_x}{\partial b_z} \delta b_z$$

$$= -\frac{\partial h_y}{\partial b_x} \frac{\partial \delta a_y}{\partial z} + \frac{\partial h_y}{\partial b_y} \frac{\partial \delta a_x}{\partial z} + \frac{\partial h_y}{\partial b_z} \delta b_z \quad = -\frac{\partial h_x}{\partial b_x} \frac{\partial \delta a_y}{\partial z} + \frac{\partial h_x}{\partial b_y} \frac{\partial \delta a_x}{\partial z} + \frac{\partial h_x}{\partial b_z} \delta b_z$$



$$\delta R(\omega_x, \omega_y) = \int_{-l_z/2}^{l_z/2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \frac{\partial h_y}{\partial b_y} \frac{\partial \delta a_x}{\partial z} + \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \frac{\partial h_x}{\partial b_x} \frac{\partial \delta a_y}{\partial z} \\ & - \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \frac{\partial h_y}{\partial b_x} \frac{\partial \delta a_y}{\partial z} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \frac{\partial h_x}{\partial b_y} \frac{\partial \delta a_x}{\partial z} \\ & + \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \frac{\partial h_y}{\partial b_z} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \frac{\partial h_x}{\partial b_z} \right) (\delta b_z) + \sigma(\omega_x \partial_t \delta a_x + \omega_y \partial_t \delta a_y) \end{aligned} \right\} dz \\ - \left( \omega_x \left( \frac{l_z}{2} \right) \delta h_y^+ - \omega_y \left( \frac{l_z}{2} \right) \delta h_x^+ \right) + \left( \omega_x \left( -\frac{l_z}{2} \right) \delta h_y^- - \omega_y \left( -\frac{l_z}{2} \right) \delta h_x^- \right)$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial h_y} = \frac{\partial h_y}{\partial h_x} \longrightarrow \begin{array}{l} \omega_x \leftrightarrow a_x \\ \omega_y \leftrightarrow a_y \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{交換に対し} \\ \text{て対称} \end{array}$$



## マクロ解析

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{N}) &= \int_{\Omega} \mathbf{N} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}) dV \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{N} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{J}) dV - \int_{\Gamma} \mathbf{N} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\chi &= \iiint (\nabla \times \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{H} - \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{J}) dV \\ &= \iiint \left\{ \nabla \times \mathbf{N} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}} \delta\mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{E}} \delta\mathbf{E} \right) - \mathbf{N} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{B}} \delta\mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{E}} \delta\mathbf{E} \right) \right\} dV \\ &= \iiint \left\{ \nabla \times \mathbf{N} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}} \nabla \times \delta\mathbf{A} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{E}} \partial_t \delta\mathbf{A} \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{N} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{B}} \nabla \times \delta\mathbf{A} - \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{E}} \partial_t \delta\mathbf{A} \right) \right\} dV \end{aligned}$$



# マクロ解析 ヤコビ行列

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{B}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}}, \frac{\partial J}{\partial \mathbf{B}}, \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{B}}, \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}}: \text{対称行列}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}} \partial_t = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{B}} \rightarrow \text{マクロ方程式は対称}$$

それぞれ(5組)の変分に対しミクロ変分解析

マクロ非線形解析  $\rightarrow$  ミクロ境界条件  $\rightarrow$  **線形**一次元解析

$$\delta A_X, \delta A_Y$$

$$\delta B_X, \delta B_Y, \delta B_Z$$

$$\delta a_x^\pm, \delta a_y^\pm, \delta b_z$$

$$\delta h_x^\pm, \delta h_y^\pm, \delta h_z$$

$$\delta E_X = \partial_t \delta A_X$$

$$\delta E_Y = \partial_t \delta A_Y$$

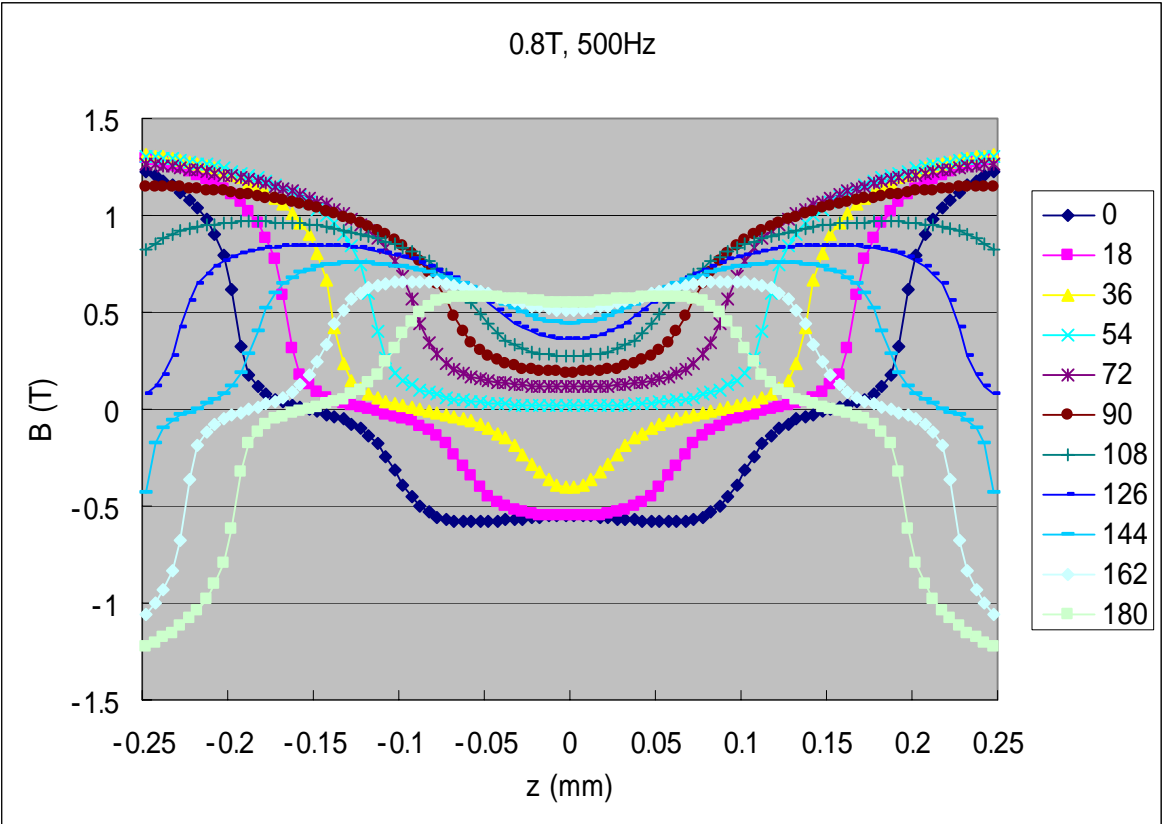
マクロ解析

$$\rightarrow \delta J_X, \delta J_Y$$

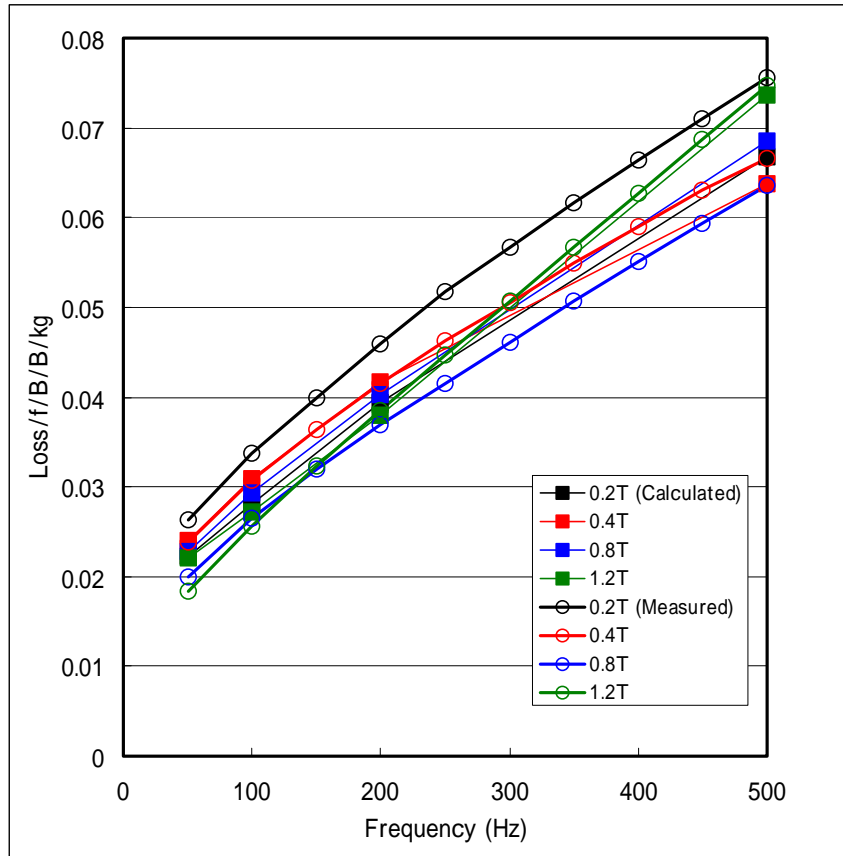
$$\delta H_X, \delta H_Y, \delta H_Z$$



# 单板内磁束密度分布 (50A310压延方向)



# 一周期ロス (50 A 3 1 0 圧延方向)



ヒステリシスロス  
は $B^2$ に比例す  
ると仮定

# 積層均質化の適用性

$d > \lambda$  のとき  $\partial_t b_{\perp}$  板厚方向一定はあり得ない



表面層は均質化は無理

表面層数層は一枚ごとにモデル化する必用あり。

交流問題で  $b_{\perp}$  を含んだ均質化が適用できる領域は無い。



## まとめ

### \* 積層鉄心線形定常、非線形過渡解析の均質化

- 磁場と電場の新たな結合

$$H = H(B, E), \quad J = J(B, E)$$

- 異常損失は小さい？

## 今後の課題

- \* コード化と検証
- \* 並列化？
- \* ヒステリシス、異常損失の扱い

