

# 幾何マルチグリッド法の電磁場数値解析への適用

亀有 昭久 (サイエンスソリューションズ(株))

## Application of Geometrical Multigrid Method to Electromagnetic Computation by Finite Element Method

Akihisa Kameari (Science Solutions International Laboratory, Inc.)

### Abstract

The computational times using multigrid method are researched and compared with those using other iteration methods. The static magnetic field problems in two and three dimensions are solved using nodal and edge elements. The used elements are quadrilaterals in 2-D and hexahedra in 3-D. The convergence of the multigrid method with V-cycle using simple Gauss-Seidel smoother is splendid and proportional to number of elements in computations using nodal and edge elements except when the elements shapes are highly flat or slender.

キーワード: 静磁場解析、有限要素法、辺要素、幾何マルチグリッド法  
(static magnetic field analysis, Finite Element Method, edge elements, geometrical multigrid method)

### 1 はじめに

準静磁場解析においては、辺要素を用いたICCG法をソルバとする有限要素法による解析は広く行われ、多自由度の大規模な解析が行われている。しかし、大規模複雑な系の解析や、精度を向上させるために、一層の多自由度化が求められる。ICCG法は、辺要素における不定性のある行列を問題なく解くことができ、そのロバスト性が高く、また、直接法等に較べ圧倒的に計算速度、容量において有利であることは広く知られている。しかし、一方、その解析時間が自由度の何乗かで増大する事が知られており、大規模解析での解析時間の負荷が大きく、今後のより一層の多自由度化に対応できるか危惧されるところである。

マルチグリッド(MG)法は、その解析時間が自由度に比例すると言われ、電磁場有限要素解析に有効に適用できるものであれば、今後の数値解析における有望な方法となると考えられる。MG法は大きく分けて、いくつかの粗密の異なるグリッド(メッシュ)間で演算を行って行く幾何(Geometrical) MG法と、方程式の行列そのものの構造から多層構造を構築して行く代数(Algebraic) MG法に分けられるが<sup>[1]</sup>、本稿では、幾何MG法について考察する。また、幾何MG法も、粗密のある多層のグリッド間に相関を持たせるもの<sup>[2]</sup>と、直接相関を持たせない方法<sup>[3]</sup>が有るが、ここでは、前者を考える。

本稿では、静磁場境界値問題にMG法を適用し、その収束性等の性質を調べる。二次元と三次元、節点要素によるスカラー場と辺要素によるベクトル場の解析につき、4辺形(二次元)や6面体(三次元)を用いて調べる。特に、辺要素の場合には、不定性があり、その関数空間構造より、特殊な取扱が求められるということも発表されており、興味のあるところである。

また、今後の電磁場解析における適用性を考える上で、扁平な要素や細長い要素への適用性が重要と考え、その場合についても調べることとする。

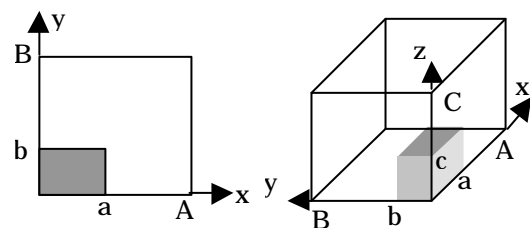
### 2 解析体系と支配方程式

解析領域は二次元の場合は図1(a)の様な矩形領域(A,B)とし、内部に(a,b)の磁性体があるとする。三次元の場合は、図1(b)の様な直方体領域(A,B,C)の中に、(a,b,c)の磁性体があるものとする。それぞれ、系全体の1/4、1/8領域と考えると、対称条件を考える。

解くべき方程式は、スカラーの場合は、磁気スカラーポテンシャル $\Omega$ で、

$$-\nabla^2 \Omega = 0 \quad (1)$$

と、表される。境界条件として、二次元の場合は、y方向に一樣な磁場が印加されるとし、y=0、y=B、x=A上の節点に $\Omega = -B_y y / m_0$ の固定値を与え、x=0はNeuman条件として自



(a) 二次元 (b) 三次元

図1 解析領域

由とする。三次元の場合は、z方向に一樣磁場が加わるとし、 $x=0$ および $y=0$ 面はNeuman面として自由とし、他の面の節点には、 $\Omega = -B_z z / m_0$ を与える。

ベクトルの場合は、磁気ベクトルポテンシャルAを用い、

$$\nabla \times \frac{1}{m} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (2)$$

を解く。二次元の場合は、Aはx-y面内(磁場はz方向)とする。境界条件は、 $x=A$ 上の辺に $B_z x \times dy$  ( $dy$ :辺長)を与え、他の境界辺にはゼロをあてた。三次元においては、z方向一樣磁場が加わるとし、 $x=A$   $y=B$   $z=C$ 面上のy方向辺に $B_z x \times dy$ を与え、xおよびz方向辺はゼロとした。また、 $x=0$   $y=0$ 面は電気壁としゼロ固定、 $z=0$ 面は磁気壁とし自由とした。

### 3 マルチグリッド法

#### (1) メッシュ分割

まず、有限要素は四辺形あるいは六面体の一次要素とした。必ずしも、長方形や直方体には限っていない。マルチグリッドメッシュは、二次元の場合は、四辺形を4ヶの四辺形に、三次元の場合は、六面体を8ヶの六面体に細分割する事により行った。不等分割も興味があり図2の様な分割も行った。

#### (2) Vサイクル

ここでは、代表的なVサイクルによるMG法について調べる。前後のSmoothing(Relaxation)の数を含め、 $V(m,n)$ と表現する。詳細については参考文献<sup>[1,4]</sup>に譲る。マルチグリッドの段数をレベルで表現する。レベルNの場合は、 $N+1$ ヶのメッシュの間で計算を実行する。

#### (3) Prolongation行列

細かいグリッドの残差(スカラーの時は節点量、ベクトルの時は辺量)の粗いグリッドへの変換行列(Restriction行列R)と、粗いメッシュの解の細かいメッシュへの変換行列(Prolongation行列P)は転置の関係にある。このため、以下では、prolongation行列についてのみ示す。基本的には内挿と考え、粗い要素での内挿関数より与えられるとした。

#### (i) スカラー節点要素の場合

粗いメッシュ内の1要素の節点量を $v$ に対し、その要素に

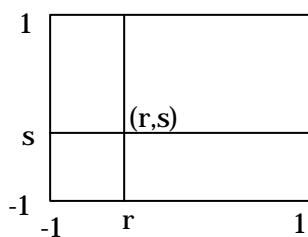


図2 メッシュ分割

含まれる1レベル上の細メッシュ内の節点量 $w$ の変換行列を示す。二次元ではそれぞれ、4および9自由度を持つ。三次元では8および27自由度を持つ。 $w = P v$ と表現した場合、各成分は、

$$P_{mn} = w_n(x_m) \quad (3)$$

と表現できる。ここで、 $w_n$ は粗メッシュの節点nの節点形状関数、 $x_m$ は細メッシュ節点の要素内の局所座標である。

例えば、図3のように番号付けし、等分割の場合を考える。節点1~4は粗メッシュに属し、1~9は細メッシュに属する。このとき、Prolongation行列は以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (4)$$

#### (ii) ベクトル辺要素の場合

辺要素の場合は、一要素での粗メッシュおよび細メッシュの自由度は、二次元で4および12、三次元で12および54となる(図5)。

辺量が辺上の積分値であることから次のように表される。

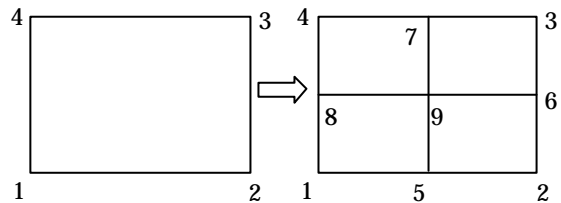


図3 節点要素 Prolongation

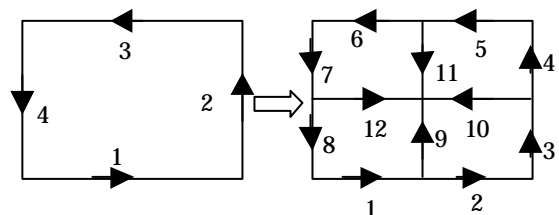


図4 辺要素 Prolongation

$$P_{mm} = \int_m \mathbf{N}_n(\mathbf{x}) d\mathbf{l} \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{N}_n$  は粗メッシュでの辺に対するベクトル形状関数であり、積分は細メッシュの辺上で行う。

例えば、節点の場合と同様に、二次元で等分割した場合の、Prolongation行列は以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

#### (4)係数行列

トップレベルより下の係数行列  $A^{2h}$  は1レベル上の係数行列  $A^h$  より

$$A^{2h} = RA^h P \quad (7)$$

により求めることができる。このことは、トップレベルの係数行列が与えられれば、より粗メッシュの係数行列が与えられることになる。Prolongation行列を前節のように与えると、上式で与えられるものと、各レベルで通常の有限要素法による行列をアセンブルしたものとは同じになる。ここでは、プログラムの都合上、(7)式は用いず、各レベルで係数行列を計算した。

#### (5) Smoother

MG法のSmootherとしては、通常のGauss-Seidel(GS)法を用いた。また、一番粗いグリッド解法としては、共役勾配法(CG)法を用いた。比較の対象として、GS法とCG法を用いた。係数行列の対角成分でスケールするScaled CG法も用いた。

#### 4 MG法による計算時間

以下における、計算時間は繰り返し計算の時間のみを含み、マトリクス作成等のプレプロセスの時間は含まない。

##### (1) 正方形、直方体メッシュ、 $\mu_r=1$ の場合

要素が二次元で正方形、三次元で立方体の等分割メッシュで、 $\mu_r=1$ (すなわち全領域が空気)の場合のマルチグリッド(MG)法、Gauss-Seidel(GS)法、共役勾配法(CG)法の計算時間比較を図5、6、7、8に示す。収束誤差は、 $10^{-8}$ としている。いずれの場合も、MG法ではV(1,1)サイクルを用いているが、それで十分である。要素数Neが1000以下の場合には、CG

CG法が一番早い、それ以上ではいずれもMG法が最速となる。MG法においては、計算時間はほぼ要素数(自由度数)に比例している。CG法では要素数に対して、1.3から1.5乗、GS法では約2乗に計算時間が比例している。節点要素によるスカラー計算と、辺要素によるベクトル計算の収束性の違いは見られない。MG法で三次元ベクトル計算の場合、V(1,1)サイクルの数はNe=64、512、4096の時で6、Ne=32768で7となっている。

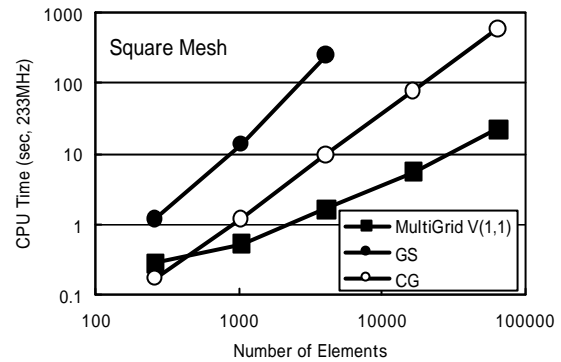


図5 スカラー計算、正方形メッシュ、 $\mu_r=1$

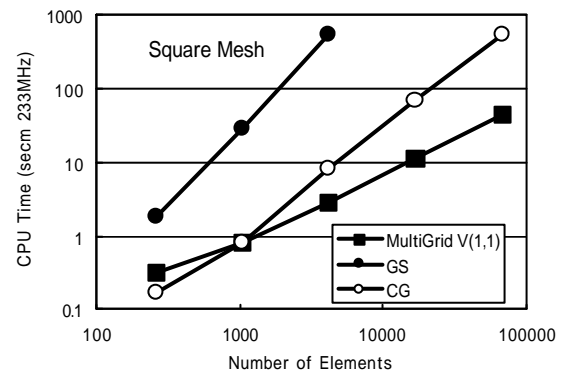


図6 ベクトル計算、正方形メッシュ、 $\mu_r=1$

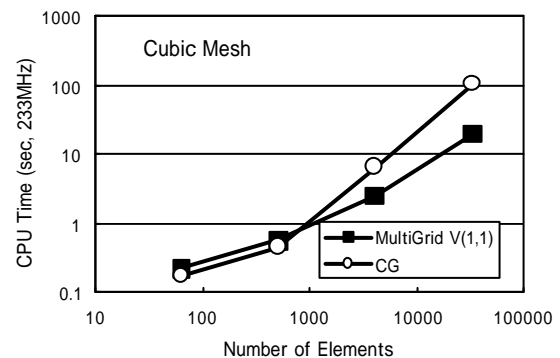


図7 スカラー計算、立方体メッシュ、 $\mu_r=1$

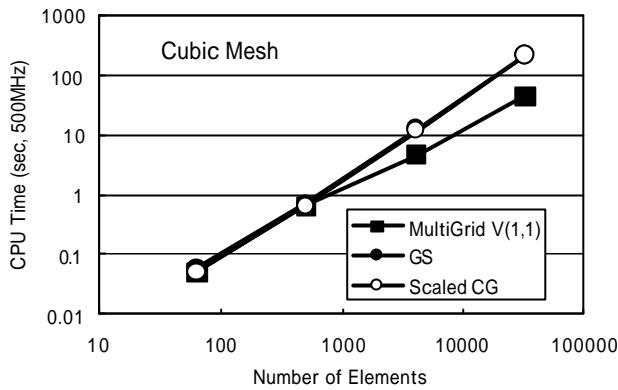


図8 ベクトル計算、立方体メッシュ、 $\mu_r=1$

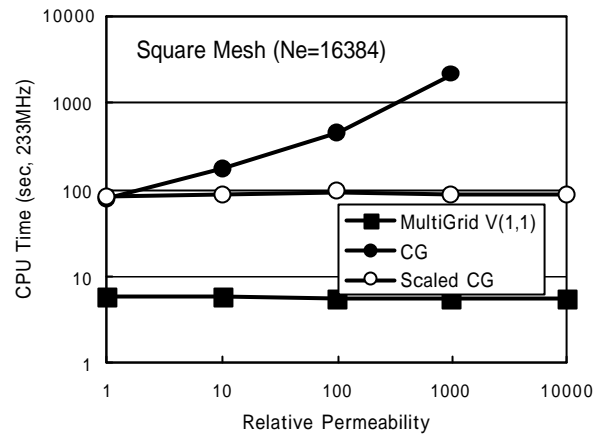


図10  $\mu_r$ 依存性(スカラー計算、正方形メッシュ)

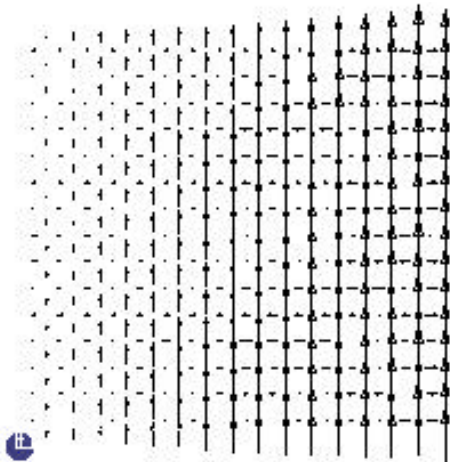


図9 ベクトルポテンシャル分布(二次元ベクトル計算)

図9に二次元ベクトル計算をMG法で解析したときの、辺上のベクトルポテンシャルの分布を示す。最右辺は境界条件として与えたものである。各要素の4辺の値を方向を考慮して加えあわせると一定値になっている。ベクトルポテンシャルの分布はx方向成分も現れ、かなり、不規則な分布をしている。

(2) 要素特性に不連続性がある場合

要素特性が空間的に不連続に変化した場合の収束性を調べる。図10に二次元スカラー計算で比透磁率 $\mu_r$ を変化させた場合の収束性を示す。スケーリング無しCG法では計算時間は $\mu_r$ が大きくなるにつれて大きくなる。一方MG法およびScaled CG法では $\mu_r$ にほとんど寄らない。3次元ベクトル計算でもほぼ同じ傾向が見られる(図11)。

(3) 要素形状依存性

要素形状に対する依存性を調べる。図12に全体のメッシュをx方向幅を大きくして扁平にしていっていった場合の計算時

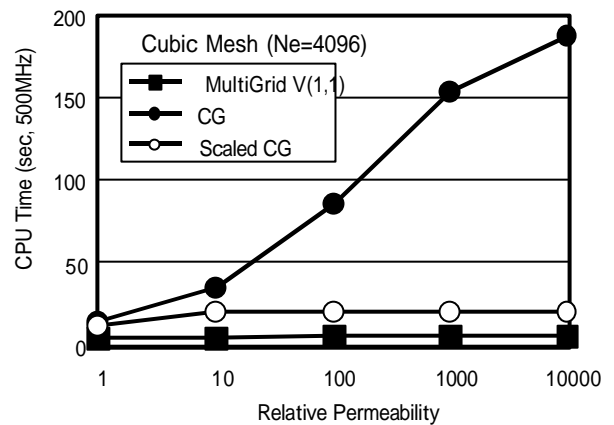


図11  $\mu_r$ 依存性(ベクトル計算、立方体メッシュ)

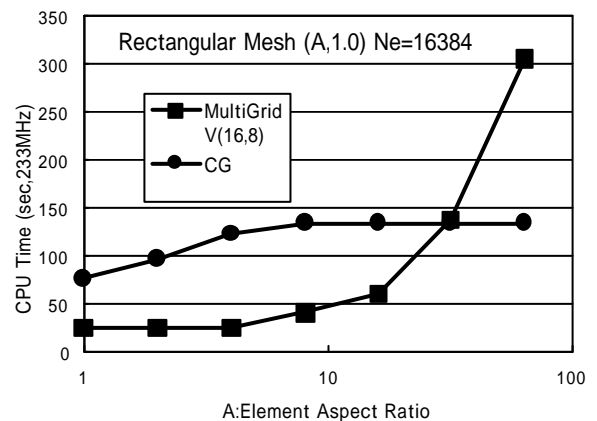


図12 要素形状依存性(二次元スカラー計算)

間依存性を示す。MG法においては、要素アスペクト比が4程度までは変化しないが、それ以上になると計算時間が急激に増大し、CG法の方が速くなる。CG法ではアスペクト比で若干計算時間が増大するものの、大きくは依存しない。

図13には、三次元スカラー計算の場合を示す。アスペクト比が1より小さい場合は、要素がz方向に細長くなって行くことを示す。要素の偏平度や偏長度が増すにつれて、二次元と同様な傾向が見られ、MG法の計算時間が増大する。

図14には、三次元ベクトル計算の場合を示す。スカラー計算と同じ傾向が見られる。

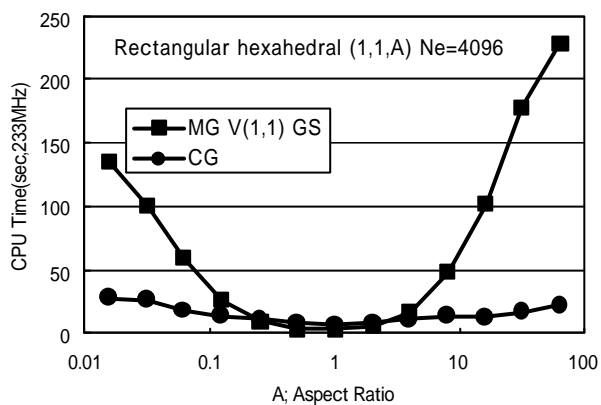


図13 要素形状依存性(三次元スカラー計算)

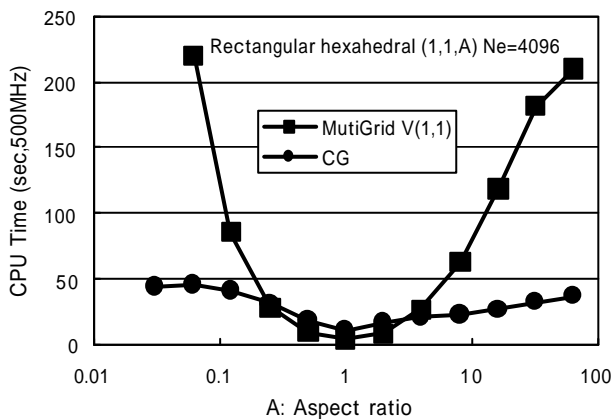


図14 要素形状依存性(三次元ベクトル計算)

#### (4) 不等分割メッシュの場合

$A=B=1$ ,  $a=b=0.1$ とし、図15のように分割するような場合を考える。空気部ではメッシュは外に向かって等比数列で大きくなって行くとする。要素の形状は長方形からゆがんでいく。比透磁率は1000とする。

図16にスカラー計算の場合を示す。 $V(1,1)$ では収束が遅いため、 $V(4,4)$ サイクルとした。MG法に対し、二つの方法を

を調べた。方式1は3章(3)節で示した、分割比を考慮したProlongation行列(3)式を使用した場合である。一方、方式2は分割が不等分割にも関わらず、等分割として求めた(4)式を用いたものである。方式2の場合は、(7)式の関係は成り立っていない。それにも関わらず、ほとんど結果は同じとなる。かなり扁平な要素が有り、MG法の収束性はあまり良くないが、要素数に対して計算時間がほぼ比例しており、多自由度では他の方法に比べ優位になる。

三次元ベクトル計算について、図17、18に示すが、直方体メッシュのような圧倒的な高速化は見られず、 $V(4,4)$ サイクルの数は $N_e=256$ で10、2048で14、16384で17と漸増しており、比例の収束性よりは悪くなっている。ただ、より多自由度の計算が必要であるが、高自由度でMG法の有利さが見受けられる。図18はProlongation行列として、(5)式を使ったものであるが、(6)式としてもほとんど変わらない。

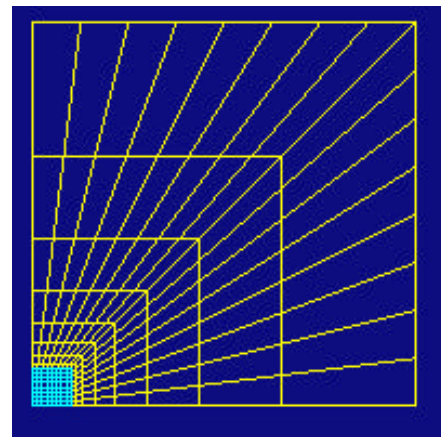


図15 二次元不等分割 (Ne=192)

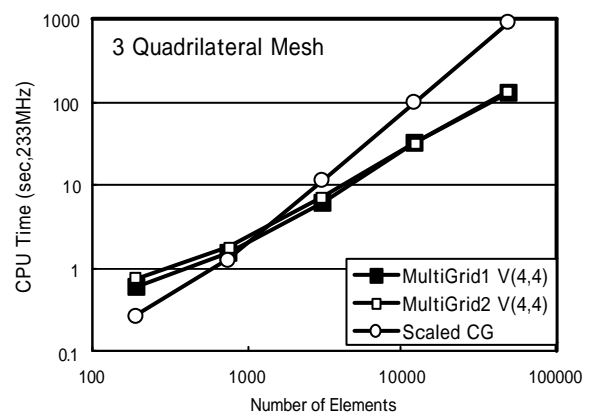


図16 不等分割メッシュの場合(二次元スカラー計算)

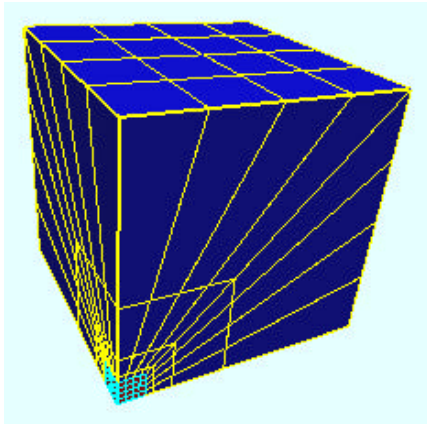


図 1.7 三次元不等分割(Ne=256、 JAVA3Dで作図)

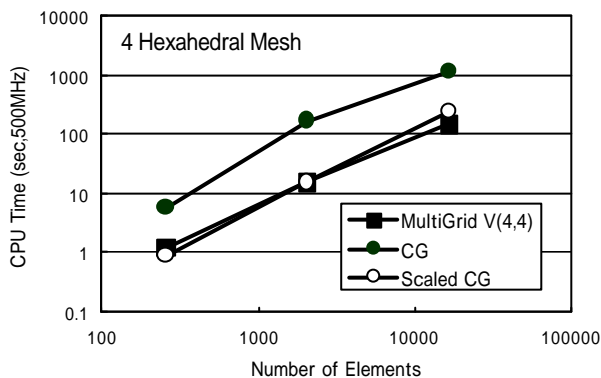


図 1.8 不等分割メッシュの場合(三次元ベクトル計算)

## 5 まとめ

本稿では、四辺形や6面体要素を用い、二次元、三次元での節点要素によるスカラー計算および辺要素によるベクトル計算に対しマルチグリッド(MG)法を適用し、その収束性と計算時間を調べた。電流ソース項の無い静磁場解析で、境界値問題を解いており、一般性があるかは不明であるが、以下のようにまとめられる。

- (1) 節点要素、辺要素に関わらず、要素が大きく扁平あるいは偏長の場合を除き、通常のGauss-Seidel法を smoother とする V サイクルの収束性は非常に良く、計算時間はほぼ自由度に比例する。
- (2) 要素特性(比透磁率)の不連続成に対して収束性は変わらない。
- (3) 要素が扁平、偏長が大きくなると収束性は急激に悪くなる。
- (4) 直交でない不等メッシュ分割を行い、扁平、偏長の異なる要素が混在する場合、(3)による収束性の悪化が見られるが、MG法の優位性は見られる。

その他、MG法とは離れるが、要素特性の不連続性があり要素行列が大きく要素によって異なる場合には、対角

スケーリングしたCG法が有効である。本解法は、要素の扁平、偏長な場合にもそれにあまり寄らない収束性を示す。

本来、従来最も高速なICCG法と比較すべきであった。しかし、ICCG法に較べても自由度の大きい問題では、MG法が有利になると考えられる。

辺要素を使用した場合、MG法の適用に対しては単純なGauss-Seidel smootherでは不十分と言われている<sup>[2,5,6]</sup>が、本報告の結果はそれと異なっている。不十分ながら、ゲージを加えてみたり、Blocked Gauss-Seidel法を適用してみたが、収束性の向上は見られなかった。ソース項を加えたような場合に、右辺項に誤差が入ってきたときにも安定して解けるかどうかの問題かもしれない。この点に関しては、今後の課題と考える。また、扁平や偏長時の収束性の悪化に対しても向上が望まれる。

MG法とは直接関係ないが、本研究でのプログラミングはJAVA言語に寄った。JAVAは今後数値解析分野でも有効に使用される可能性があり、それを調べてみようとしたものである。感触としては、種々の有限要素や解法を「継承」を用いモデル化できること、ガーベッジコレクションが行われメモリ管理が非常に容易であること、等オブジェクト指向プログラミングの有効性が有ると感じられた。ただ、十分なオブジェクト設計無しに、闇雲にプログラミングしてしまった結果非常に見通しの悪いものになってしまった。計算時間や計算容量については、数値的には示すことは出来なかったが、余り良くない感触を持っている。JAVA3Dによる図形出力も試みたが、プログラミングは非常に簡単のように思われた。ただ、高速に表示するにはかなり工夫を要するであろうと思われる。

## 参考文献

- (1) “Multigrid Methods”, Stephen F. McCormick, Editor, SIAM, Philadelphia, 1987, ISBN 0-89871-214-9.
- (2) M. Schnnerl, J. Schoberl, M. Kaltenbacher, “Nested Multigrid methods for the fast numerical computation of 3D magnetic fields”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 1557-1560, July 2000.
- (3) 坪井、野口、山下、「ノンステッドマルチグリッド法を用いた有限要素解析の高速化」電気学会静止機回転機合同研究会資料、SA-99-4, RM-99-58, 1999.
- (4) W. L. Briggs, “A Multigrid Tutorials”, SIAM, Philadelphia, 1987, ISBN 0-89871-221-1.
- (5) R. Hiptmair, “Multigrid method for Maxwell’s equations”, *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 36, No. 1, pp. 204-225, 1998.
- (6) D. N. Arnold, R. S. Falk, R. Winther, “Multigrid in  $H(\text{div})$  and  $H(\text{curl})$ ”, *Numerische Mathematik* Vol. 85, pp. 197-218, 2000.