

辺要素有限要素法における渦電流解析の改善 (節点二次辺一次四面体要素による)

亀有 昭久 (サイエンスソリューションズ(株))

Improvement of Eddy Current Computation Using Tetrahedral Edge Elements
with Quadratic-Nodal and Linear-Edge Shape functions

Akihisa Kameari (Science Solutions International Laboratory, Inc.)

Abstract

The paper shows an introduction of quadratic nodal shape functions into tetrahedral Nedelec linear edge elements to improve the accuracy of the eddy current analysis with the skin effects. It is shown that the introduction overcomes the oscillatory distribution in the eddy current density resulted by the analysis using thin tetrahedral elements with bad aspect ratio.

キーワード: 渦電流解析、有限要素法、辺要素、A- ϕ 法

(eddy current analysis, Finite Element Method, edge elements, A- ϕ formulation)

1 はじめに

有限要素法による三次元電磁場解析において、四面体要素は、自動メッシュ生成が六面体よりも容易であるため、将来的に多く使われる可能性がある。このとき、表皮効果等がある場合、解析の自由度を押さえるためには、非常に扁平な四面体要素を使用せざるを得ない場合が多い。しかし、A- ϕ 法においてNedelec一次四面体要素⁽¹⁾を使用すると、解析された渦電流が要素毎に振動する非現実的な分布を示すことが知られている⁽²⁾。

例えば、図1のような薄板導体板(20cm \times 20cm、厚さ1cm、1/8モデル)に面垂直に一様磁場を印可(100Hz)した場合の渦電流分布は図2のようなものとなる。図2では、各要素中心での渦電流密度分布を示している。全体的な渦電流の分布は妥当なものであるが、要素毎にベクトルが異なった方向を向いている。この傾向は、要素を扁平にするほど大きくなる。今のように、規則的なメッシュでは、何らかの平均操作等により滑らかな分布が得られる可能性⁽³⁾があるが、一般的には処理がかなり困難と考えられる。ちなみに、六面体直方体一次要素の結果は図3の様になり、振動は見られない(面内方向の分割が不足しているが)。A- ϕ 法においては、ゲージ不定性のため、導体中の ϕ はゼロとする事ができるが、以上の結果は、計算速度は変わるものの、導体中に ϕ を加えても加えなくても結果は依存しない。

このように、一次四面体辺要素を使用した場合、要素の扁平度をあまり大きくすることができない。このことは、表皮厚さが小さい場合、面内方向にもメッシュ分割を小さくして行く必

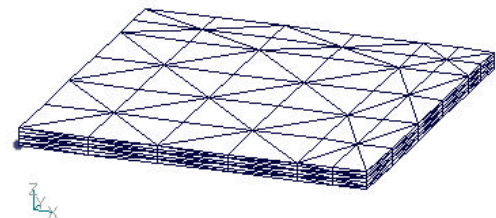


図1 平板モデルの四面体要素分割
(20cm \times 20cm、厚さ1cm、 $\sigma=5.67S/m$
1/8モデル、1層の厚さは1mm)

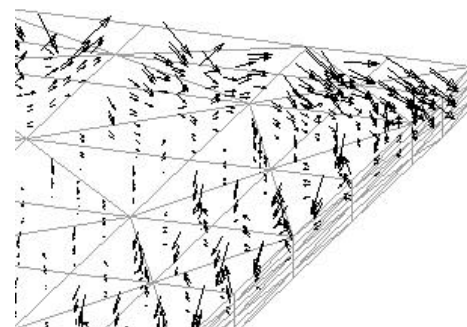


図2 一次四面体要素による渦電流解析結果

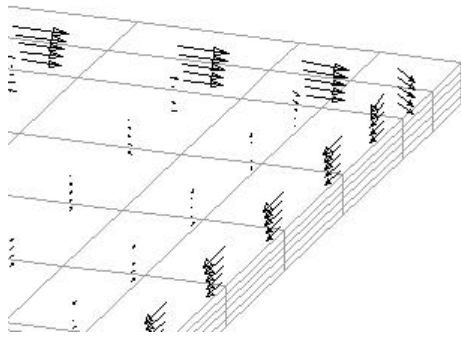


図3 一次6面体要素による渦電流解析結果

要があることを示し、解析を非常に困難なものとする。この、一つの解決策としては、より高次の辺要素を使用することであるが、二次Nedelec要素の一要素内の自由度は20であり、一次の4に較べかなり大きく、計算負荷が過大となることが予想される。

本稿では、上の問題の一つの解決法として、二次の節点形状関数を加えることによる方法について述べる。

2 考察

1章で述べたような一次4面体要素における渦電流分布での不都合が何故起こるのであろうか。一次4面体要素には、その関数空間内に様な電流分布を表す空間が含まれていないと言う意見もあるが⁽⁴⁾、その関数空間は一次のスカラー形状関数の勾配を含んでおり、様な分布をそれで表現することは可能である。定常電流場の解析では一次スカラーポテンシャルだけで充分である。むしろ、有限要素関数空間の非回転場(回転(rotation)がゼロの関数空間)とそうでない回転場の関数空間の広さ(自由度)が問題だと考える。

辺要素A-φ法⁽⁵⁾における磁気ベクトルポテンシャルの関数空間を考えると、次のように、スカラー関数の勾配で表される非回転場とそうでない回転場に明確に分離することができる。

$$\mathbf{A} = \nabla f + \mathbf{A}' \tag{1}$$

ここで、 \mathbf{A}' はゼロで無い限り $\nabla \times \mathbf{A}' \neq 0$ であるベクトル関数である。このような分解は、木構造を使うことにより行うことができる⁽⁶⁾。渦電流場の方程式を Galerkin 法で弱定式化した場合、それぞれの関数空間に対して、次の方程式に分けることができる。

$$\int \nabla \times \mathbf{N}' \cdot \mathbf{H} \mathbf{V} + \int \mathbf{N}' \cdot \mathbf{J} dV = \dots \tag{2}$$

$$\int \nabla w \cdot \mathbf{J} dV = 0 \tag{3}$$

ここで、 \mathbf{N}' は \mathbf{A}' に対するベクトル重み関数であり、 w は f に対するスカラー重み関数である。(3)式は、 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ に対する方程式であり、電流の発散をゼロに束縛する。この束縛の基に、磁場方程式である(2)式を解くことを意味する。

いま、それぞれの関数空間の自由度を考える。 \mathbf{A}' の関数空間自由度は、木構造における co-tree の数となり、メッシュ中の辺の数から節点の数を差し引いたものにほぼ等しくなる。また、 f の関数空間自由度は節点の数にほぼ等しい。6面体一次要素でメッシュが構成した場合、 \mathbf{A}' と f の関数空間自由度の比は約 2 : 1 となる。一方、4面体一次要素を考えると、6面体メッシュの各要素を5分割して4面体メッシュとしたとき、その比は約 5 : 1 となる。一次4面体の場合、非回転場 f の関数空間が回転場 \mathbf{A}' の関数空間に較べて小さく、ひいては電流発散の条件が弱められていると考えることができる。このように考えると、一次4面体要素で、渦電流密度分布が滑らかでない理由も理解される。また、電流発散の条件を強めるために、非回転場すなわちスカラの勾配関数空間を広げれば、渦電流分布の精度を上げられることが予想される。

3 4面体節点二次辺一次要素

まず、通常の一次辺要素(図4(a))を考える。辺要素形状関数は節点 i から節点 j に向かう辺に対して、次のように与えられる。

$$N_{ij} = I_i \nabla I_j - I_j \nabla I_i \tag{1}$$

ここで、 I_i は、節点 i の4面体体積座標であり、節点に対する一次形状関数でもある。この要素は辺6自由度、節点4自由度である。以下、この節点一次辺一次要素を一次要素と呼ぶ。

次に、ここで提案する節点二次辺一次要素(以下二次要素)については、まず、辺に対する形状関数は(1)式のままとし、1要素に6自由度とする。それに対して、節点に対しては、通常の二次形状関数とし、頂点の節点 i に対しては、

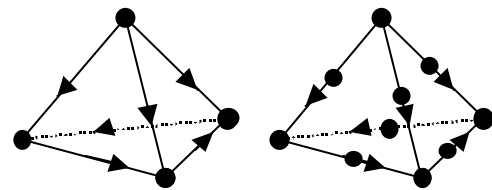
$$w_i = I_i(2I_i - 1) \tag{2}$$

頂点 i と頂点 j の中間の点に対しては、

$$w_{ij} = 4I_i I_j \tag{3}$$

の形状関数を用いる。節点に対し、10自由度となる。

関数空間の関係は図5の様になる。まず、スカラー関数空間において、節点一次関数空間は節点二次関数空間に含まれている。ベクトル関数空間においては、節



(a) 節点一次辺一次要素 (b) 節点二次辺一次要素

図4 4面体辺要素

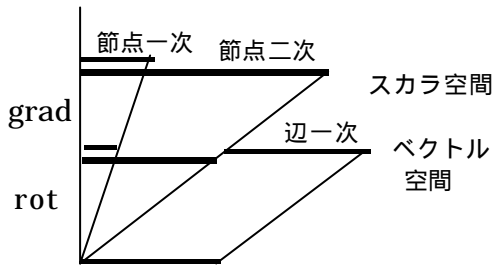


図5 4面体関数空間関係

点一次関数の勾配関数空間は、辺一次関数空間に含まれ、かつ辺一次関数の非回転ベクトル関数空間と一致する。節点二次関数の勾配関数空間は、辺一次関数の勾配関数空間を除いて辺一次関数空間には含まれない。辺一次要素関数空間に節点一次関数の勾配関数空間を加えることは、なんら辺一次関数空間を広げない。それに対して、節点二次関数の勾配関数空間を加えると、辺一次関数空間に新たな非回転ベクトル関数空間を加えることになる。その拡張された空間の自由度は、新たに加えられた節点数6となる。結果として、一次辺二次節点4面体要素の関数空間の自由度は12となる。

静磁場解析においては、非回転場を加えても何も効果がないが、渦電流を含む場合、非回転場が重要であり、その結果に大きく影響する。非回転場の自由度を増すことにより、渦電流の解析精度が向上すると考えられる。前に述べた回転場と非回転場の比は、約5:4となり、非回転場の関数空間が大きくなる。

この二次4面体要素の自由度は12であり、辺に2自由度を持たす、いわゆるMur、羽野要素と同じ自由度をもっている⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾。実際、同じ関数空間を構成しており、同じものと考えられる。ただ、もともと一次要素においてもそのICCG法の収束性の良さから、スカラポテンシャルを含めて解析することが多く、今の場合カラポテンシャルを一次から二次に変更するだけであり、そのプログラミングは非常に簡単である。

4 解析例

まず、1章で示した例について、二次要素での解析結果を図5に示す。図2に見られるような振動は無く、妥当な結果が得られている。

次に、情報ストレージ研究推進機構(SRC)磁気記録シミュレーションWGでのベンチマーク問題⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾の4面体要素による解析結果を報告する。解析に用いたヨークのメッシュ分割図を図7に示す。ヨークは厚さ方向に10層に分割され、表皮効果を調べるため表面に寄せて分割されており、表面近くの要素は非常に扁平なものになっている。以下、使用する座標系および評価位置を図8に示す。

表1に解析諸元を示す。二次要素とすると、ほぼ導体

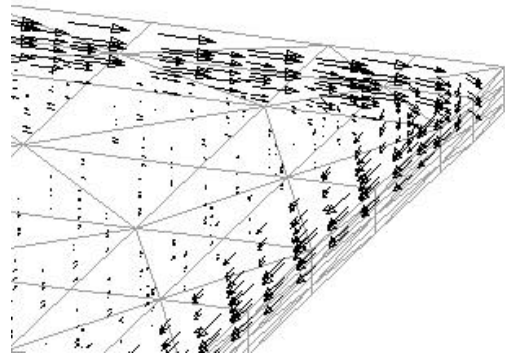


図6 節点二次辺一次4面体要素による渦電流解析結果

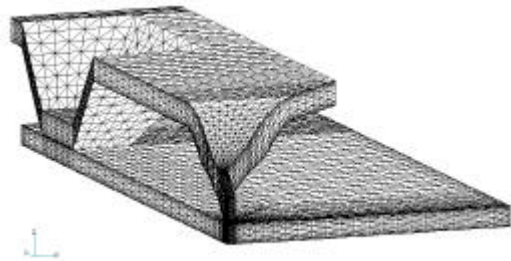


図7 SRC磁気ヘッド要素分割

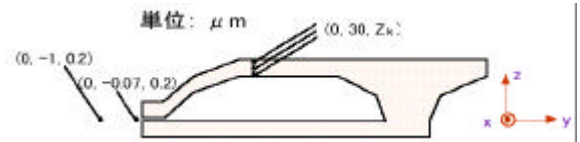


図8 座標系と評価点位置

表1 解析諸元

	節点一次辺一次	節点二次辺一次
要素数(導体)	350265 (103100)	
節点数(導体)	64629 (24343)	483175(158909)
辺数(導体上)	418546(134566)	
未知数	430500	561057
非ゼロ要素数	4508037	8402864
ICCG繰返数	23687	34243
非線形繰返数	311	315
CPU時間	18.6 Hr	42.6 Hr

dt=0.5e-7, 56Steps, SUN ULTRA 1 167MHz
Error(ICCG)=3e-7, Error(NR)=1e-4

部の辺数だけ未知数が増え、行列の非ゼロ要素数は倍近くになっている。Newton-Raphson法の非線形繰返し数はほぼ同じであるが、ICCGの収束がかなり遅くなり、計算時間は2.3倍程度となっている。

まず、磁場立ち上げ直後の渦電流の影響の大きい時点での、磁性体表面での渦電流密度強度分布を、一次要素に対して図9、二次要素に対して図10に示す。渦電流密度は、節点に対しそれと結合する要素の値を単純平均している。一次要素においては、メッシュ分割に依存するパターンが現れており、不合理な分布となっている。これに対し、二次要素の場合は、分布が滑らかになり妥当なものとなっている。

より詳細に、渦電流密度分布を上ヨークの一部($x=0$, $y=30$)近傍で示すと、図11、12の様になっている。一次要素においては、電流が波打っているが、二次要素とすると、面に沿った合理的な分布となっている。 $x=0$, $y=30$ の線上の渦電流密度をプロットすると図13の様になる。 x 方向電流を見ると、二次要素の方がより表皮効果を示しており精度が上がっているように思われる。問題は、一次要素の z 方向成分で、 x 成分と同程度の大きさとなっていることであり、これが電流波打ちの原因となっている。二次要素にすると、 z 成分はほとんどなく、合理的なものとなっている。

解析される磁場分布にも、次数の差で結果に差がでてくる。図14に $x=0$, $y=30$ におけるヨーク下面、中間、上面での x 方向磁場の時間変化を示す。渦電流の影響の大きい磁場立ち上げ、立ち下げ時では表面の磁場にかなりの差がでてきており、その影響は導体内部にも及んでいる。二次要素にすると、導体表面での磁場の応答が早くなり、また内部での時間遅れがより大きくでくる。図15にはヘッド磁界($(0, -1, 0.2)$)における z 方向磁場の時間変化を示す。ヘッド磁界には、両要素における差はほとんど現れていない。このことは、全体的な磁束の流れは一次要素でも十分模擬できていることを示していると考えられる。

5 まとめ

本稿では、扁平な一次4面体要素を用いたA- ϕ 法による渦電流解析において、その渦電流密度分布が要素毎に振動する解が得られるが、その解決策として、節点二次辺一次4面体要素を使用することを提案した。試解析の結果は良好であり、何らポスト処理をしなくても、滑らかな妥当な分布が得られた。要素数を同じとすると、解析容量と時間は大きくはなるものの、過大なものでは無く、許容される範囲と思われる。

参考文献

- (1) J.C. Nedelec, "Mixed finite elements in R3", *Numr. Math.*, vol. 35, pp. 315-341, 1980
- (2) 藤原(岡山大学)、羽野(山口大学)、河瀬(岐阜大学)、石間(日本総研): private communication.

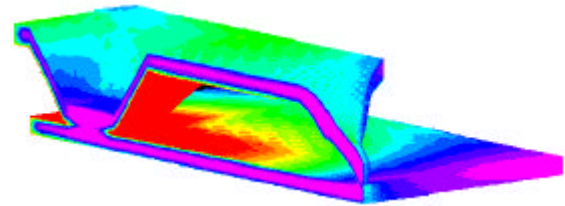


図9 渦電流密度強度分布(節点一次)

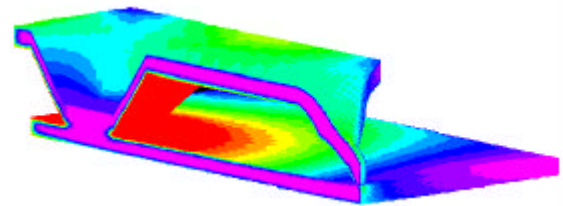


図10 渦電流密度強度分布(節点二次)

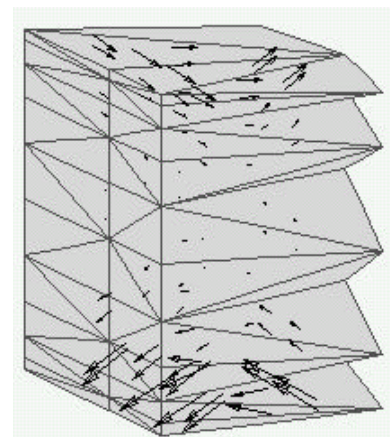


図11 渦電流密度分布(節点一次)

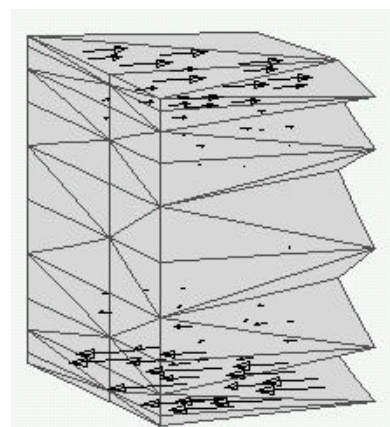


図12 渦電流密度分布(節点二次)

- (3) 藤原 (岡山大学) : private communication.
- (4) 羽野 (山口大学) : private communication.
- (5) A. Kameari, "Calculation of transient 3D eddy current", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 16, no. 2, pp. 466-469. March (1990).
- (6) A. Kameari, "Three dimensional eddy current calculation using edge elements for magnetic vector potential", *Applied Electromagnetics in Materials, Proceedings of the First International Symposium, Tokyo, 3-5 October 1988*, Edited by K. Miya, Pergamon Press, pp. 225-236.
- (7) G. Mur and A.T. de Hoop, "A finite-element method for three-dimensional electromagnetic fields in inhomogeneous media", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 21, no. 6, pp. 2188-2191, November 1985
- (8) M. Hano, "Vector finite-element solution of anisotropic waveguides using novel triangular elements", *Electronics and Communications in Japan*, pt. 2, vol. 71, no. 8, pp.71-80, 1988.
- (9) A. Kameari, "Symmetric second order edge elements in triangles and tetrahedrons", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 35, no. 3, pp. 1394-1397, May 1999.
- (10) 亀有、"辺要素有限要素法による磁気記録ヘッドの磁場解析"、電子情報通信学会技術研究報告、MR 98-53,1999.
- (11) K. Fujiwara, F. Ikeda, A. Kameari, Y. Kanai, K. Nakamura, N. Takahashi, K. Tani, T. Yamada: Thin film write head analysis using a benchmark problem, presented at COMPUMAG-Sapporo, October1999.

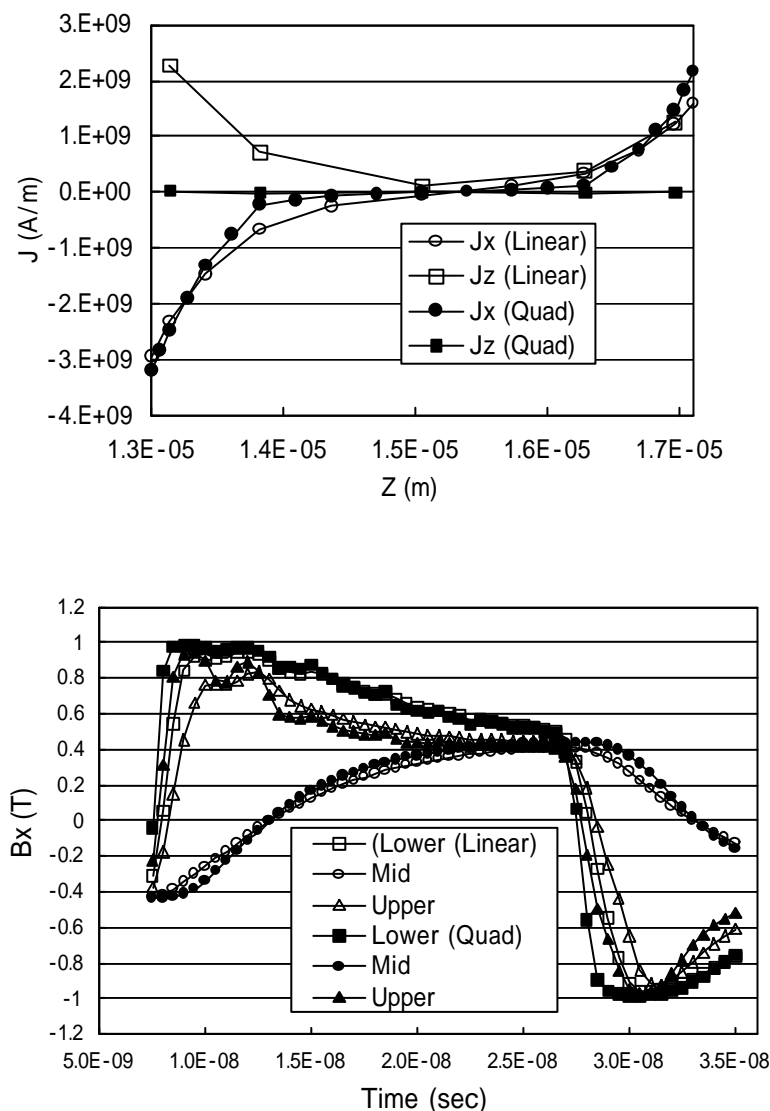


図 1 4 ヨーク磁場時間変化

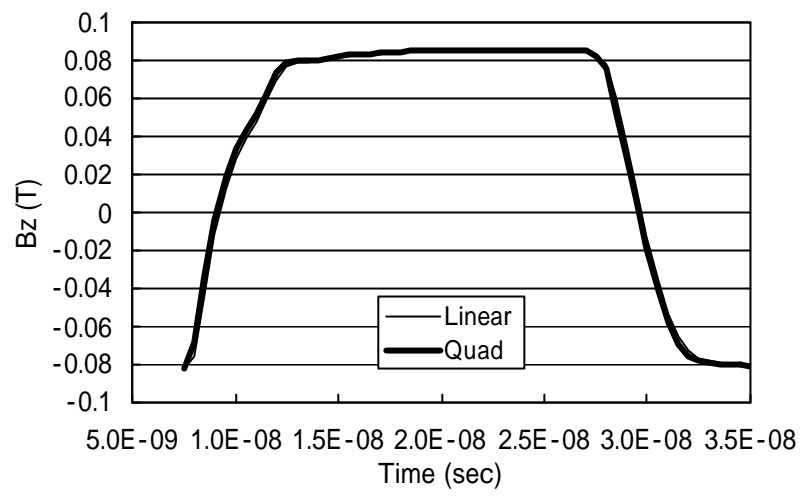


図 1 5 ヘッド磁場時間変化